PENYELESAIAN MASALAH ALIRAN MAKSIMUM DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA DIJKSTRA DAN ALGORITMA FORD-FULKERSON

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Jurusan Matematika

OLEH

KURATUL AINI
10554001581

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS & TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM
RIAU

2010

PENYELESAIAN MASALAH ALIRAN MAKSIMUM DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA *DJIKSTRA* DAN ALGORITMA *FORD-FULKERSON*

KURATUL AINI
NIM: 10554001581

Tanggal Sidang : 29 Juni 2010
Periode Wisuda: Oktober 2010

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Masalah aliran maksimum dalam suatu jaringan transportasi merupakan suatu jaringan yang menghubungkan tempat asal ke tempat tujuan melalui rute-rute tertentu, dimana setiap rute-rute perjalanan tersebut diberikan bobot atau nilai arus yang mengalir pada lintasan tersebut. Skripsi ini akan membahas tentang penyelesaian masalah aliran maksimum dengan menggunakan Algoritma *Djikstra* dan Algoritma *Ford-Fulkerson*, untuk mendapatkan arus maksimum yang mengalir pada sebuah *network* tanpa melanggar batas maksimum perjalanan. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa arus maksimum dengan menggunakan Algoritma Djikstra dan Algoritma Ford-Fulkerson mendapatkan nilai yang sama.

Kata Kunci: Algoritma *Djikstra*, Algoritma *Ford-Fulkerson*, Aliran Maksimum.

ON THE SOLUTION MAXIMUM FLOW PROBLEM BY USING DJIKSTRA'ALGORITHM AND FORD-FULKERSON ALGORITHM

KURATUL AINI
NIM: 10554001584

Date of Final Exam: 11 June 2010
Graduation Cremony Priod: October 2010

Mathematic Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Maximum flow problem in a transportation that connect from first place to the final destination throught some way that every way is given profundity or current value that flow on sircuit. This Scription thread to solve the maximum flow by using Djikstra'Algorithm and Ford-Fulkerson'Algorithm, to get the maximum flow that flow on a network withouth infringe the top of maximum of journey. According by observation, know that maximum flow by using Djikstra' Algorithm and Ford-Fulkerson Algorithm are the same value.

***Keywords**: Djikstra'Algorithm, Ford-Fulkerson Algorithm, Maximum flow*

DAFTAR ISI

Halaman

LEMBAR PERSETUJUAN ii
LEMBAR PENGESAHAN iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL iv
LEMBAR PERNYATAAN v
LEMBAR PERSEMBAHAN vi
ABSTRAK viii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR x
DAFTAR ISI xii
DAFTAR LAMBANG xiv
DAFTAR TABEL xv
DAFTAR GAMBAR xvi

BAB I. PENDAHULUAN I-1
1.1 Latar Belakang .... I-I
1.2 Rumusan Masalah. I-2
1.3 Tujuan Pulisan. I-2
1.4 Sistematika Penulisan I-2

BAB II. LANDASAN TEORI II-1
2.1 Terminologi dalam Graf II-1
2.2 Masalah Aliran Maksimum II-7
2.3 Algoritma Djikstra II-8
2.4 Algoritma Ford-Fulkerson II-8

BAB III. METODOLOGI PENELITIAN III-1

BAB IV. PENYELESAIAN MASALAH ALIRAN MAKSIMUM
MENGGUNAKAN ALGORITMA *DJIKSTRA* DAN
ALGORITMA *FORD-FULKERSON* IV-1
4.1 Masalah Aliran Maksimum IV-1
4.2 Penerapan Algoritma *Djikstra* dalam masalah
Aliran Maksimum IV-2

4.3 Penerapan Algoritma *Ford-Fulkerson* dalam
Masalah Aliran Maksimum IV-2
4.4 Contoh Kasus Masalah Aliran Maksimum IV-3
4.4.1. Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum
pada Kendaraan.. IV-3
1. Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum
pada kendaraan menggunakan Algoritma Djikstra.......... IV-4
2. Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum pada

kendaraan menggunakan Algoritma *Ford-Fulkerson* IV-8
4.4.2 Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum
pada sistem pemipaan minyak....................................... . IV-17
1. Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum pada
sistem pemipaan minyak menggunakan Algoritma
Djikstra... IV-18
2. Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum pada
Sistem pemipaan minyak menggunakan Algoritma
Ford-Fulkerson... IV-23

BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN V-1
5.1 Kesimpulan V-1
5.2 Saran V-1

DAFTAR PUSTAKA
DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu cabang ilmu matematika terapan yang sekarang berkembang adalah Teori graf. Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik atau simpul dan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau disebut juga dengan sisi.

Teori graf dapat mempresentasikan suatu masalah dengan lebih sederhana dan mampu menerangkan secara detail masalah tersebut, sehingga mampu mencari suatu solusi. Salah satu penerapan teori graf yang sangat besar manfaatnya adalah dalam membangun suatu jaringan, baik jaringan transportasi (*Transport network)* maupun jaringan kerja (*activities network)*.

Suatu jaringan transportasi akan mempresentasikan suatu model umum dalam pendistribusian benda/barang dari tempat asal ke tempat tujuan melalui berbagai rute, sebuah *Network* biasanya digunakan dalam sistem saluran pipa, sistem lalu lintas dengan kendala berupa batas maksimum terhadap benda atau barang tersebut. Namun persoalan yang sering muncul dalam suatu jaringan transportasi adalah bagaimana menentukan rute-rute perjalanan sehingga jumlah total perjalanan yang dilakukan setiap hari menjadi maksimum.

Berdasarkan latar belakang tersebut di atas, penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul ”Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum dengan Menggunakan Algoritma *Djikstra* dan Algoritma *Ford-Fulkerson*”

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan di bahas dalam penelitian ini adalah bagaimana solusi dari masalah aliran maksimum (*maximum flow problems)* dengan menggunakan Algoritma Djikstra dan Algoritma Ford-Fulkerson.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mencari arus maksimum yang mengalir pada sebuah *Network* (jaringan) sehingga total perjalanan yang dilakukan setiap hari menjadi maksimum tanpa melanggar batas maksimum perjalanan dengan menggunakan Algoritma Djikstra dan Algoritma Ford-Fulkerson

1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam pembuatan tulisan ini mencakup 5 bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini berisikan informasi tentang teori-teori yang digunakan dalam penulisan ataupun metode/teorema yang dipakai.

Bab III Metode Penelitian

Bab ini berisikan cara-cara atau langkah-langkah dalam menyelesaikan *Maximum Flow Problems*, Algoritma Djikstra, dan Algoritmaa Ford-Fulkerson.

Bab IV Pembahasan dan Analisa

Bab ini berisikan penyelesaian tentang *Maximum Flow Problem* menggunakan Algoritma Djikstra dan Ford-Fulkerson.

Bab V Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Berikut ini akan dijelaskan tentang landasan teori yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

2.1 Terminologi dalam Graf.

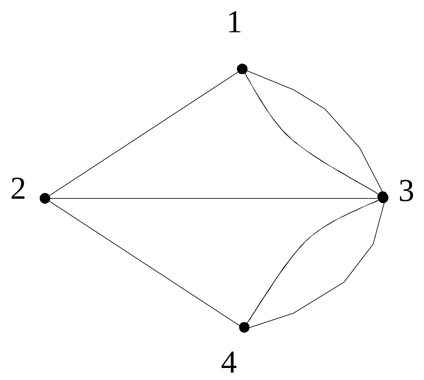
Definisi 2.1 Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul. Atau dapat ditulis dengan notasi $G = (V, E)$.

Definisi 2.2 Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda, yaitu sisi yang menghubungkan sepasang simpul lebih dari satu buah.

Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*Loop*) yaitu sisi yang simpul ujungnya sama.

Contoh Graf ganda : misalkan $V = \{1,2,3,4\}$

$$E = \{(1,2),(2,3),(1,3),(1,3),(2,4),(3,4),(3,4)\}$$

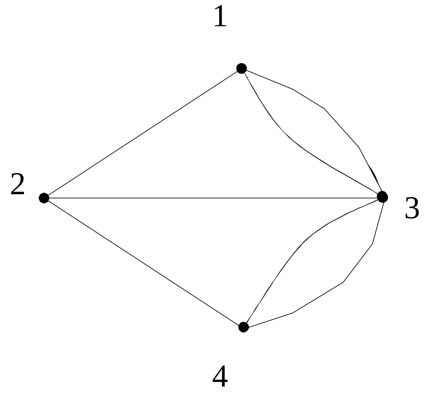


Gambar 2.1 Graf ganda

Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*Loop*) yaitu sisi yang simpul ujungnya sama.

V = {1,2,3,4}

E = {(1,2), (2,3), (1,3), (1,3), (2,4), (3,4), (3,4), 3,3) }



Gambar 2.2 Graf Semu

Definisi 2.3 Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau gelang pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dibagi menjadi 2 jenis:

1. Graf sederhana (*simple graph*) : Graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun gelang
2. Graf tidak sederhana *(unsimple graph)* : Graf yang memuat sisi ganda atau gelang.

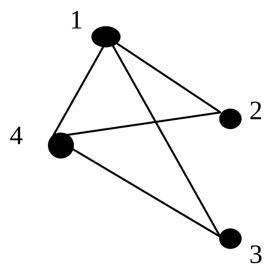
Definisi 2.4 Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dapat dibedakan menjadi 2 jenis :

1. Graf tak-berarah (*undirected*), yaitu graf yang setiap sisinya tidak mempunyai orientasi arah
2. Graf Berarah (*directed graph),* yaitu graf yang setiap sisinya mempunyai orientasi arah

   Sisi pada graf berarah dinamakan busur (*arc*)

Definisi 2.5 Dua buah simpul pada graf tak berarah *G* dikatakan bertetangga $(adjacent)$ bila keduanya tehubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, *u* bertetangga dengan *v*, jika (u,v) adalah sebuah sisi pada graf *G***,** Untuk sembarang sisi $e=(u,v)$ sisi *e* dikatakan bersisian (*incident)* dengan simpul *u* dan simpul v.

a. Contoh simpul bertetangga



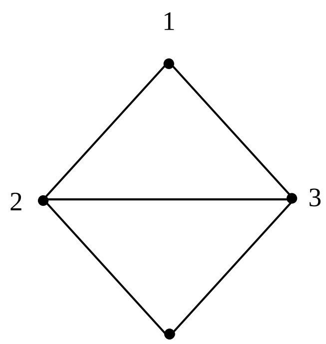
Gambar 2.3 Simpul bertetangga

$V=\{1,2,3,4\}$

$E=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(4,3)\}$

Simpul 2 bertetangga dengan simpul 1 dan 4 tetapi simpul 2 tidak bertetangga dengan simpul 3.

b. Contoh simpul bersisian



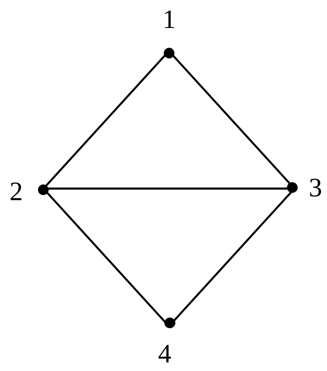
Gambar 2.4 Simpul bersisian

Sisi (2,3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3, sisi (2,4) bersisisian dengan simpul 2 dan simpul 4 tapi sisi (1,2) tidak bersisian dengan simpul 4.

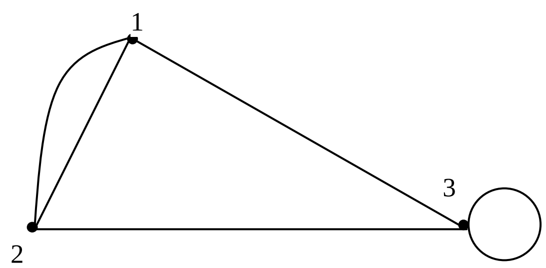
Definisi 2.6 Suatu walk dalam sebuah graph G adalah suatu deretan sedangkan Lintasan adalah suatu *walk* terbuka yang tidak memuat pengulangan simpul.
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut dengan sirkuit atau siklus.

Definisi 2.7 Graf G dikatakan terhubung (*conect graph)* jika untuk setiap pasang simpul u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v atau v ke u .

Contoh Graf terhubung (connect graph)



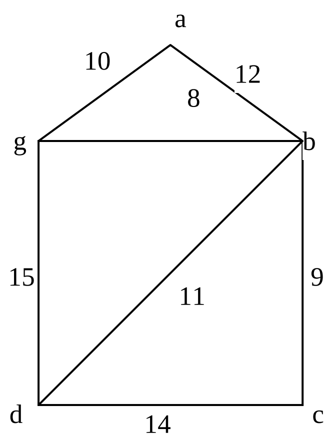
(i)



(ii)

Gambar 2. 5 (i) dan (ii) Graf terhubung

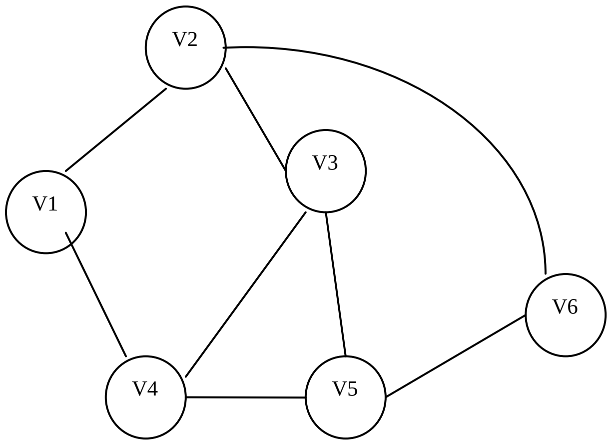
Definisi 2.8 Graf berbobot (*weight graph)* adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga atau bobot.



Gambar 2.6 Graf Berbobot

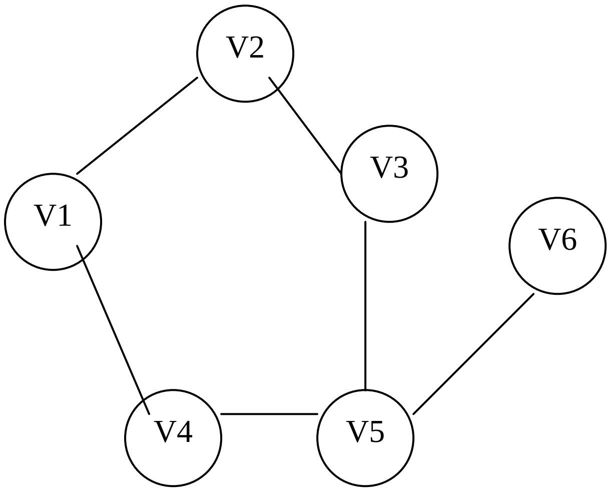
Definisi 2.9 Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf, dan $G_1(V_1, E_1)$ adalah *subgraph* dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$

Berikut ini adalah contoh dari Graf A jika $G = (V, E)$.



Gambar 2.7 Graf A

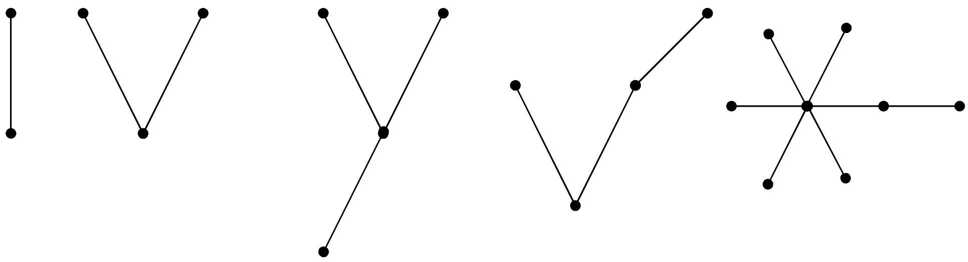
Sedangkan gambar dibawah ini merupakan subgraf dari A.



Gambar 2.8 *Subgraf* **dari A**

Definisi 2.10 *Tree* adalah sebuah graf terhubung yang tidak memiliki sirkuit.

Contoh :

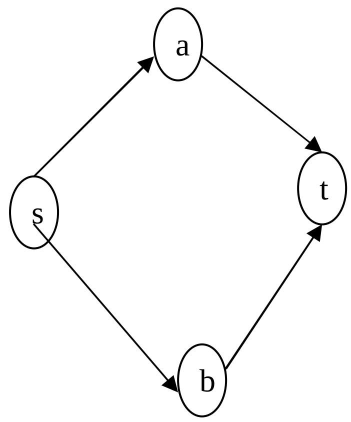


Gambar 2.9 Tree dengan (2, 3, 4,dan 8 simpul)

2.2 Terminologi Masalah Aliran Maksimum

Flow (aliran) didefinisikan sebagai suatu cara untuk mengirim benda-benda dari satu tempat ke tempat lain. Sedangkan *maximum flow problem* (Masalah Aliran Maksimum) didefinisikan sebagai masalah pencarian untuk mencari arus maksimum yang dapat mengalir pada sebuah *network.*

Maximum flow problem akan diberikan sebuah *network-graph* berbobot dan berarah. Yang mana disetiap sisinya terdapat suatu kapasitas, simpul awal, dan simpul akhir. Berikut ini adalah contoh *maximum flow* pada sebuah *flow network.*



Gambar 2.10 Maximum flow problem pada sebuah flow network

2.3 Algoritma Dijkstra

Sudah banyak algoritma untuk mencari lintasan terpendek yang pernah ditulis orang, Algoritma yang sering digunakan adalah ***Algoritma Dijkstra.*** (sesuai dengan nama penemunya Edsger Wybe Dijkstra). Algoritma ini termasuk pencarian graf yang digunakan untuk menyelesaikan masalah lintasan terpendek dengan satu sumber pada sebuah graf yang tidak memiliki sisi negatif, dan menghasilkan sebuah pohon lintasan terpendek.

Skema umum Algoritma Dijkstra adalah :

1. Buatlah 3 buah list, yaitu list jarak (list 1), list simpul sebelumnya (list 2), dan list simpul yang sudah dikunjungi (list 3), serta variabel yang terdapat pada simpul tersebut.
2. Isi semua nilai dalam list jarak dengan tak hingga.
3. Isi semua nilai dalam list 2 dan 3.
4. Salah satu variabel yang terdapat pada suatu simpul dijadikan simpul awal.
5. Tandai variabel sebagai simpul yang telah dikunjungi.
6. *Update* list 1 dan 2 berdasarkan simpul-simpul yang dapat langsung dicapai dari variabel tersebut.
7. Tandai variabel sebagai simpul yang telah dikunjungi.
8. Ulangi langkah 5 sampai semua simpul sudah dikunjungi.

2.4 Algoritma Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson merupakan suatu algoritma pelabelan (berbentuk table) untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum, pertama kali digunakan pada tahun 1956. Oleh L.R Ford dan D.R Fulkerson. Menurut metode ini, mereka ingin memaparkan suatu cara untuk mencari kapasitas maksimum suatu aliran dalam jaringan. Selain menghemat waktu, metode ini juga efektif untuk melakukan suatu proses, tindakan, atau pengambilan keputusan untuk tujuan tertentu dengan mengetahui aliran maksimum yang terdapat dalam suatu jaringan.

Pengambilan keputusan algoritma ini dimisalkan dengan, sebuah lintasan dari *source* (dimulai dari node) menuju *sink* (node terakhir) dengan kapasitas yang dihasilkan untuk setiap *edges* dalam lintasan. Setiap variabel yang terdapat pada aliran ini akan dihubungkan dengan sisi-sisi yang berupa saluran dengan

1. c$[u,v]$ merupakan kapasitas debit tertentu antara variabel u dan v
2. f $[u,v]$ merupakan aliran yang terjadi antara variabel u dan v
3. cr$[u,v]$merupakan kapasitas sisa yang tidak digunakan antara variabel u dan v, yang mana cr $[u,v]$ = c$[u,v]$ - f$[u,v]$.

Skema umum Algoritma Ford-Fulkerson didapat dengan mencari lintasan dari sisa antara s dan t , jika ada maka:

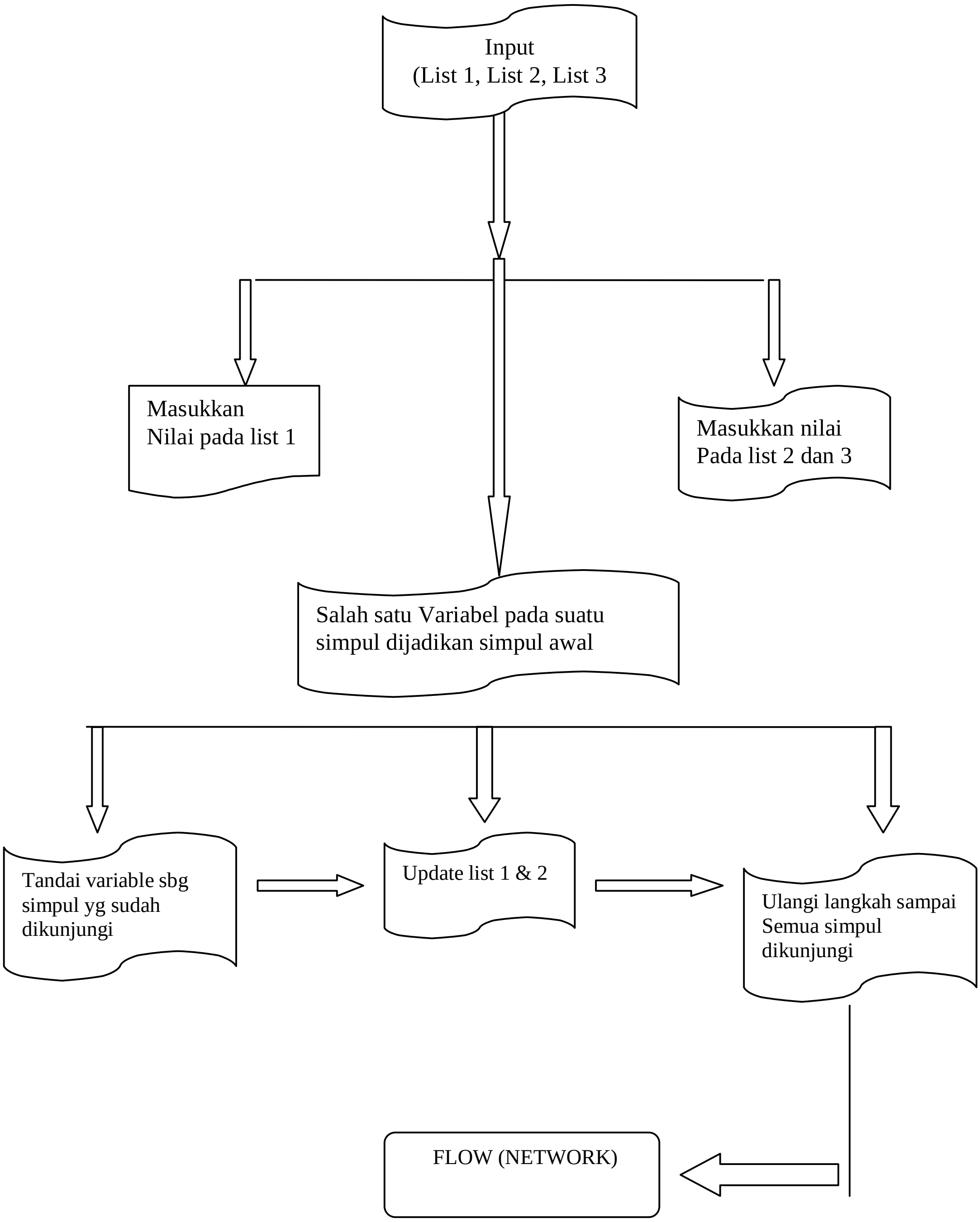
1. "Aliri" melalui lintasan tersebut dengan debit sesuai dengan sisa terkecil dalam lintasan tersebut.
2. *Update* setiap f$[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan tersebut sesuai dengan debit tersebut.
3. Hitung setiap sisa untuk setiap(u,v) dalam lintasan sebagai sisa baru.
4. Ulangi hingga tidak ada lintasan sisa antara s dan t.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang penulis pakai pada skripsi ini adalah metodelogi studi literatur, yaitu dengan langkah-langkah

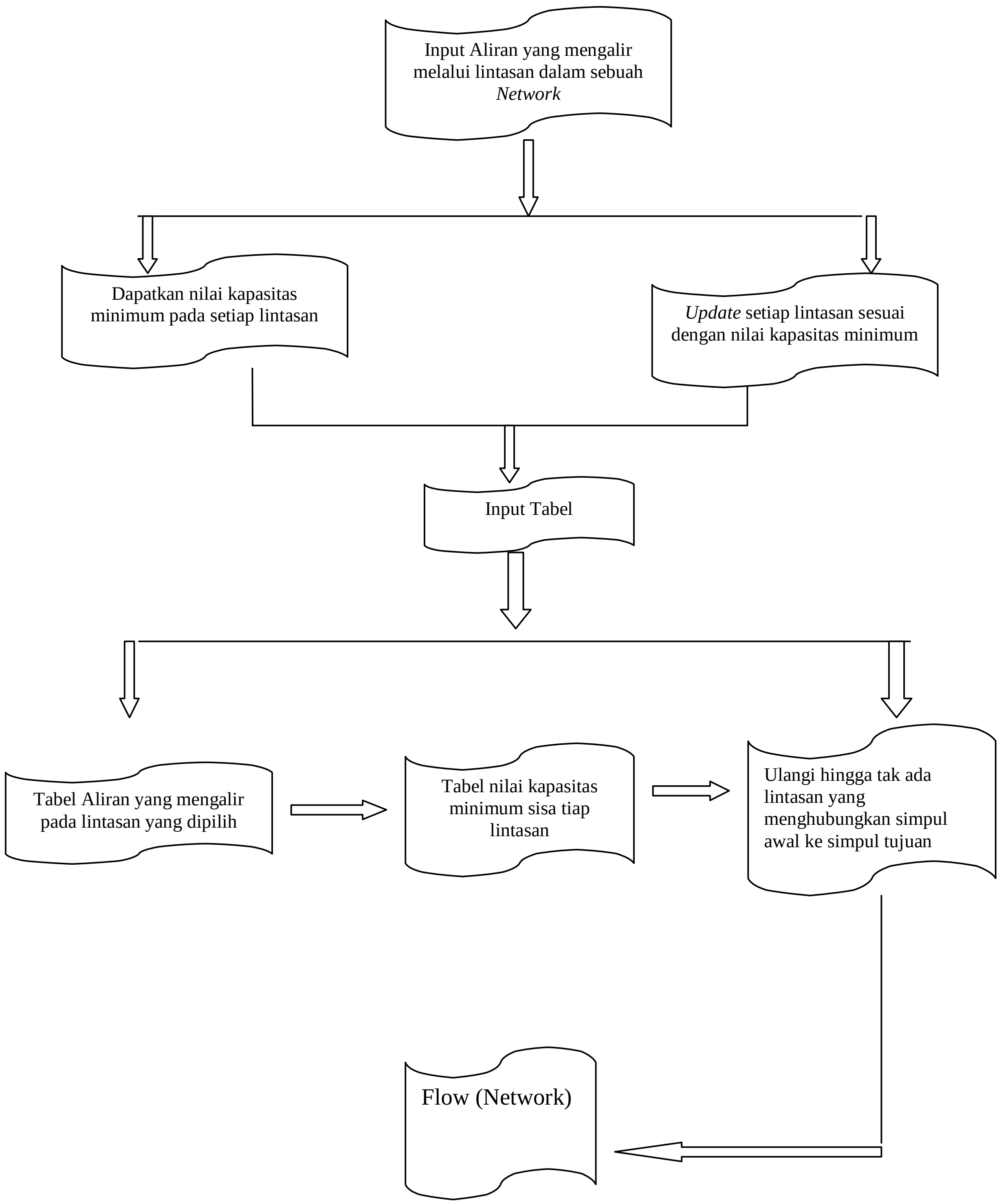
1. Flowchart Algoritma Dijkstra
2. Flowchart Algoritma Ford-Fulkerson

Flowchart Algoritma Dijkstra



Gambar 3.1 Algoritma Djikstra

Flowchart Algoritma Ford-Fulkerson



Gambar 3.2 Flowchart Algoritma Ford-Fulkerson

BAB IV
PENYELESAIAN MASALAH ALIRAN MAKSIMUM DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA DJIKSTRA DAN ALGORITMA FORD-FULKERSON

4.1 Masalah Aliran Maksimum

Masalah aliran maksimum (*maximum flow problem*) merupakan salah satu bagian dari persoalan transportasi yang bertujuan untuk mencari suatu aliran yang maksimum yang dapat mengalir pada sebuah *network*. Masalah ini merupakan pengembangan dari masalah biaya minimum aliran (*minimum cost flow*) yang bertujuan untuk meminimumkan biaya.

Masalah aliran maksimum yang sering timbul dalam kehidupan sehari-hari adalah memaksimalkan aliran distribusi perusahaan dari pabrik ke konsumen, memaksimalkan aliran air dalam sistem bendungan, memaksimalkan aliran kendaraan di dalam jaringan transportasi, dan lain-lain.

Secara umum, masalah aliran maksimum bisa dideskripsikan sebagai berikut:

1. Semua aliran melalui jaringan terhubung dan terarah yang berawal dari satu simpul yang disebut sumber dan berakhir pada simpul yang disebut sasaran.
2. Simpul lainnya adalah simpul pengiriman (simpul-simpul tersebut disimbolkan dengan A, B, C, D, E atau 1, 2, 3, 4).
3. Aliran melalui sebuah sumber hanya diizinkan pada arah yang ditujukkan oleh mata panah dengan jumlah aliran diberikan oleh kapasitas busur tersebut.

   Jadi, secara umum tujuan utama dari masalah aliran maksimum adalah untuk memaksimalkan total aliran dari sumber ke sasaran dalam suatu *Netwok.*

4.2 Penerapan Algoritma Djikstra dalam Masalah Aliran Maksimum

Selain digunakan untuk mencari lintasan terpendek, Algoritma Djikstra juga merupakan salah satu Algoritma yang akan digunakan dalam menyelesaikan masalah aliran maksimum.

Sebelum penyelesaian masalah aliran maksimum menggunakan Algoritma Djikstra dilakukan, kita harus melakukan sedikit modifikasi dari Algoritma ini. Secara garis besar, adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah aliran maksimum menggunakan Algoritma Djikstra adalah

1. Cari sebuah lintasan yang belum dipilih yang menghubungkan simpul awal dengan simpul tujuan.
2. Pada lintasan yang dipilih, carilah sebuah sisi yang memiliki nilai kapasitas yang minimum.Bila kapasitas minimum sisa sama dengan 0, langsung ke langkah 4.
3. Alirkan arus sejumlah kapasitas minimum sisa pada lintasan yang terpilih.
4. Kembali ke langkah 1 sampai semua lintasan diperiksa.

4.3 Penerapan Algoritma Ford-Fulkerson dalam Masalah Aliran Maksimum

Algoritma lain yang digunakan untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum adalah Algoritma Ford-Fulkerson, Algoritma ini merupakan suatu Algoritma pelabelan.

Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson adalah:

1. Pilih Lintasan garis dalam jaringan tersebut yang menghubungkan dari titik awal ke tujuan.
2. Cari nilai kapasitas minimum pada lintasan tersebut.
3. *Update* setiap $\mathrm{f}[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path tersebut sesuai dengan debit tersebut.
4. Hitung residual $\mathrm{cr}(u,v) = c(u, f) - f(u,v)$ untuk setiap (u,v) dalam path sebagai residual baru
5. Ulangi hingga tidak ada lintasan residual antara titik awal dengan tujuan.

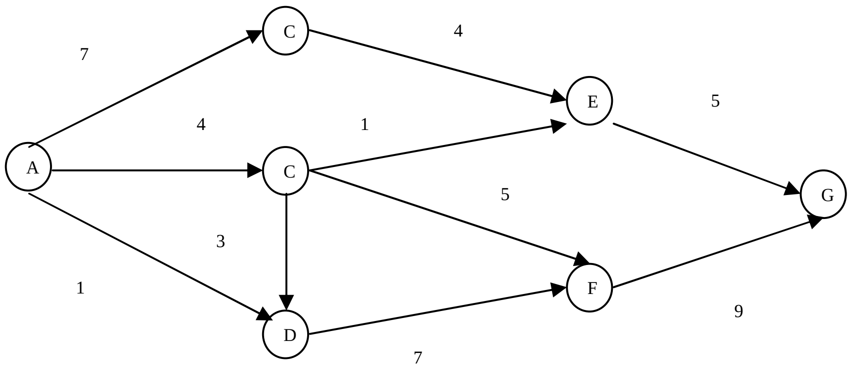
4.4 Contoh Kasus Masalah Aliran Maksimum (*Maximum Flow Problem*)

Pada skripsi ini akan dibahas tentang penyelesaian masalah aliran maksimum pada kendaraan dan penyelesaian masalah aliran maksimum pada sistem pemipaan untuk mengalirkan minyak dari suatu lokasi ke lokasi yang lain.

4.4.1 Penyelesaian masalah aliran maksimum pada kendaraan (*Maximum flow of car*)

Salah satu contoh penyelesaian masalah aliran maksimum adalah memaksimumkan aliran kendaraan (*maximum flow of cars*) yang akan melewati jalan penghubung antara Mess Karyawan dengan kantor tempat mereka bekerja. Misalkan terdapat 7 buah jalan yaitu *A, B, C, D, E, F, G* yang dihubungkan oleh rute-rute perjalanan. Huruf *A* menunjukkan mess tempat mereka tinggal dan huruf *G* merupakan kantor tempat mereka bekerja. Sedangkan *B, C, D, E, F* merupakan jalan penghubung keduanya. Sedangkan angka 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 merupakan arus kendaraan mobil yang melintas pada setiap jalan yang menghubungkan dari $A \rightarrow F$. Sebelum menjelaskan ke pemecahan masalah, maka perlu dijelaskan terlebih dahulu arti angka-angka yang terdapat pada setiap cabang. Cabang yang menghubungkan antara $A \rightarrow B$ yang memuat angka 7, maksudnya adalah arus maksimal kendaraan yang dapat melintasi jalan dari $A \rightarrow B$ adalah 700 mobil / jam, sedangkan dari $B \rightarrow E$ memuat angka 4, maksudnya adalah besarnya arus maksimal kendaraan yang dapat melintasi jalan dari $B \rightarrow E$ adalah 400 mobil/jam, begitu seterusnya.

Jalan penghubung tersebut dapat digambarkan dalam jaringan dibawah ini.



Gambar 4.1 Jalan Penghubung Mess ke Kantor

Permasalahannya adalah berapa arus maksimum dari jalan yang menghubungkan mess karyawan dengan kantor. Untuk menyelesaikan permasalahan *Maximum Flow of Cars* pada jaringan di atas, kita bisa menggunakan Algoritma Djikstra dan Algoritma Ford-Fulkerson.

1 Penyelesaian masalah aliran maksimum pada kendaraan menggunakan Algoritma Djikstra

Berdasarkan gambar 4.1 akan dicari sebuah solusi dari permasalahan aliran maksimum kendaraan (*maximum flow of car*) dengan menggunakan Algoritma Djikstra. Sebelum menentukan langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah aliran maksimum diatas, dapat kita ketahui bahwa terdapat 5 lintasan yang menghubungkan simpul awal (*A*) dengan simpul tujuan (*G*). Lintasan-lintasan tersebut adalah :

1. Lintasan $A-B-E-G$
2. Lintasan $A-C-E-G$
3. Lintasan $A-C-F-G$
4. Lintasan $A-C-D-F-G$
5. Lintasan $A-D-F-G$

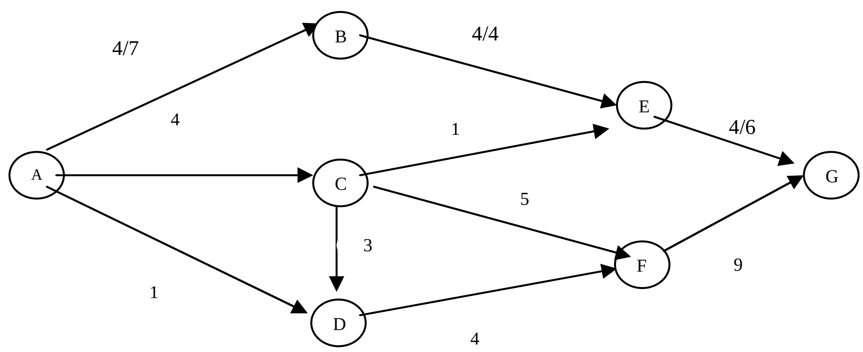
Berdasarkan 5 lintasan diatas, kita bisa mencari solusi untuk mencari masalah aliran maksimum pada permasalahan diatas. Ada 3 langkah yang akan diselesaikan dalam masalah aliran maksimum dengan menggunakan Algoritma Djikstra, yaitu :

Langkah 1 : Pada jaringan diatas didapat intasan $A-B-E-G$ yang menghubungkan antara mess karyawan (*A*) ke kantor tempat mereka bekerja (*G*)

Langkah 2 : Nilai kapasitas sisi yang didapat pada lintasan tersebut adalah $(7,4,6)$ = 4. sedangakan nilai kapasitas minimum sisa nya adalah 4

Langkah 3 : Alirkan arus sejumlah 4 satuan pada lintasan $A-B-E-G$

Berdasarkan langkah-langkah yang telah diselesaikan, maka arus lintasan yang diperoleh adalah



Gambar 4.2 Lintasan dari *A-B-E-G*

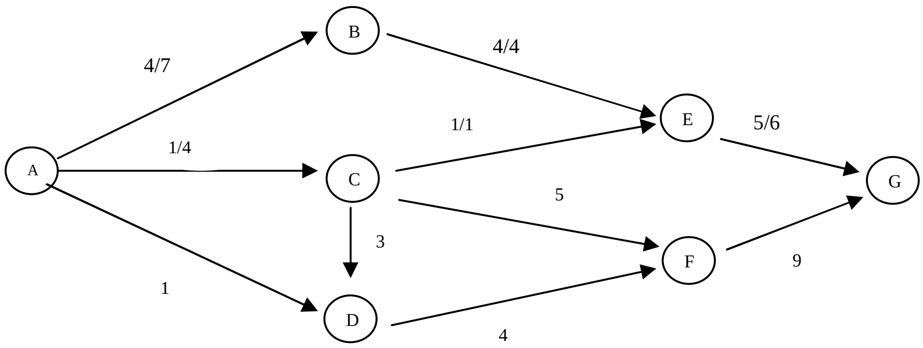
Berdasarkan gambar 4.2 akan dicari lagi solusi untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum lain yang bisa menghubungkan dari *A* ke *G*, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Lintasan yang dipilih berikutnya adalah lintasan $A - C - E - G$

Langkah 2 : Nilai kapasitas sisinya adalah : $(4,1,2)$ sedangkan nilai kapasitas minimum sisa yang diperoleh adalah 1

Langkah 3 : Alirkan arus sejumlah 1 satuan pada lintasan $A - C - E - G$.

Berdasarkan langkah-langkah yang dilakukan diatas, maka arus lintasan yang diperoleh untuk meghubungkan antara mess ke tempat mereka bekerja adalah :



Gambar 4.3 Lintasan dari *A-C-E-G*

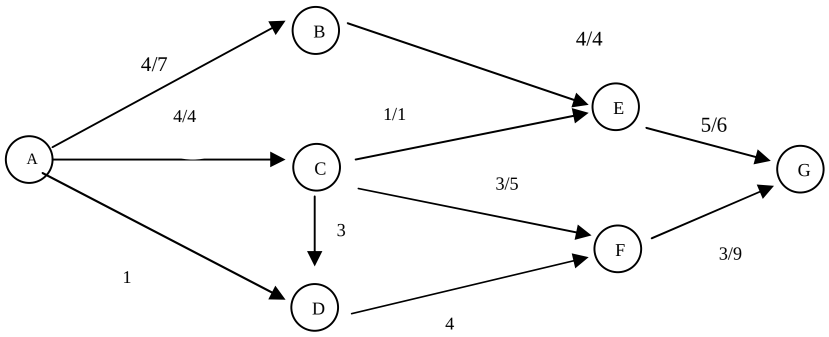
Berdasarkan gambar 4.3 diatas, maka akan dilakukan langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum yang menghubungkan simpul awal dengan simpul akhir, langkah-langkah nya adalah :

Langkah 1 : Jalur atau lintasan yang masih memungkinkan untuk dilewati adalah Lintasan $A - C - F - G$

Langkah 2 : Dari lintasan ini diperoleh nilai kapasitas sisinya : $(3,5,9)$ sedangkan nilai kapasitas minimum sisa yang diperoleh pada lintasan tersebut adalah 3

Langkah 3 : Alirkan arus sejumlah 3 satuan pada lintasan $A - C - F - G$

Dari langkah-langkah diatas, diperoleh lintasan sbb :



Gambar 4.4 lintasan dari *A-C-F-G*

Berdasarkan gambar 4.4 akan dicari lagi lintasan yang dapat menghubungkan antara simpul awal dengan simpul tujuan, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Lintasan yang dipilih berikutnya adalah lintasan $A-C-D-F-G$

Langkah 2 : Nilai kapasitas sisi adalah : $(0,3,4,6)$, dan nilai kapasitas minimum sisa adalah 0

Langkah 3 : Tidak dapat dialiri arus lagi karena nilai kapasitas minimum nya adalah 0

Karena nilai kapasitas minimum sisanya dalah 0, maka lintasan yang diperoleh sama dengan lintasan sebelumnya.

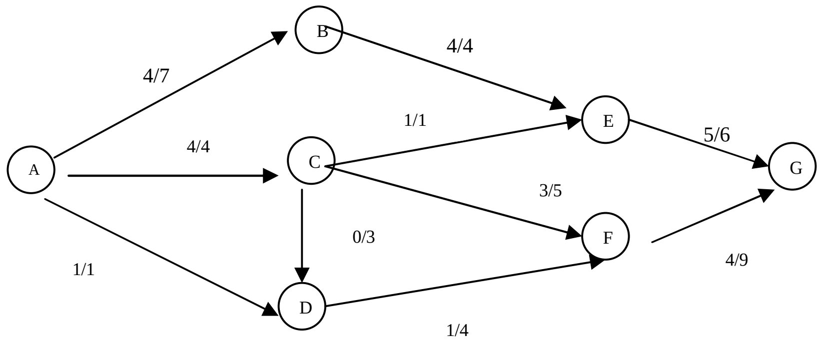
Berdasarkan gambar 4.4 diatas, maka diperoleh lintasan terakhir yang menghubungkan antara mess dengan kantor karyawan, dengan melakukan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Kemudian Pilih lintasan $A-D-F-G$ sebagai lintasan terakhir yang menghubungkan mess karyawan dengan kantor tempat mereka bekerja.

Langkah 2 : Kapasitas sisi nya adalah : $(1,4,6)$ dan kapasitas sisa minimumnya adalah 1

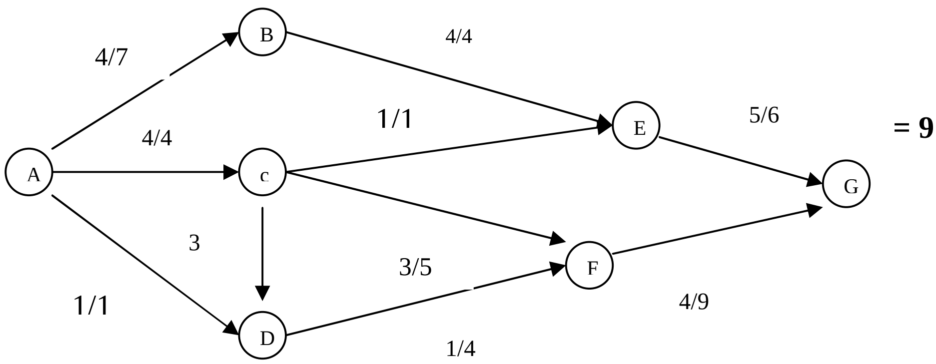
Langkah 3 : Alirkan arus sejumlah 1 satuan pada lintasan $A-D-F-G$.

Pada langkah ini tidak ada lagi jalur atau lintasan yang dapat menghubungkan arus dari *A* ke *G*. Sehingga solusi dari masalah aliran maksimum menggunakan Algoritma Djikstra adalah:



Gambar 4.5 lintasan dari *A-D-F-G*

Karena tidak ada lagi arus yang dapat mengalir dari *A* ke *G*, maka proses telah mencapai penyelesaian yang optimum. Dari hasil diatas dapat kita ketahui bahwa jumlah aliran maksimum yang dapat mengalir dari Network tersebut adalah 9, artinya arus maksimum yang menghubungkan antara lokasi mess karyawan dengan kantor tempat mereka bekerja adalah 9 atau 900 mobil/jam.



Gambar 4.6 Solusi dari maximum flow of cars menggunakan Algoritma Djikstra

2 Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum pada kendaraan menggunakan Algoritma Ford – Fulkerson

Selain menggunakan Algoritma Djikstra, masalah aliran maksimum kendaraan juga bisa dicari dengan menggunakan suatu Algoritma pelabelan (berbentuk tabel) yang dikenal dengan Algoritma Ford-Fulkerson yang nantinya akan memberikan suatu solusi yang optimal. Sebelum kita menyelesaikan masalah aliran maksimum menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson, ada 3 langkah yang harus kita tentukan terlebih dahulu, yaitu kita harus Menentukan nilai kapasitas, aliran yang mengalir pada setiap lintasan, dan kapasitas tersisa dari lintasan yang menghubungkan antara Mess tempat karyawan tinggal dengan kantor tempat mereka bekerja, nilai kapasitas dan aliran tersebut akan disajikan dalam bentuk tabel ,

Berdasarkan gambar 4.1 dapat kita peroleh nilai kapasitas, aliran dan kapasitas sisa dari network yang mengalir pada lintasan, ke 3 nilai tersebut dapat disajikan dalam bentuk tabel seperti dibawah ini.

Tabel 4.1 Nilai Kapasitas dari Mess ke Kantor

c	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	7	4	1	0	0	0
B	0	-	0	0	4	0	0
C	0	0	-	3	1	5	0
D	0	0	0	-	0	4	0
E	0	0	0	0	-	0	6
F	0	0	0	0	0	-	9
G	0	0	0	0	0	0	-

Tabel 4.2 Aliran yang Mengalir dari Network tersebut

f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	0	0	0	0	0	0
B	0	-	0	0	0	0	0
C	0	0	-	0	0	0	0
D	0	0	0	-	0	0	0
E	0	0	0	0	-	0	0
F	0	0	0	0	0	-	0
G	0	0	0	0	0	0	-

Tabel 4.3 Nilai Kapasitas Sisa dari Gambar 4.1

cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	7	4	1	0	0	0
B	0	-	0	0	4	0	0
C	0	0	-	3	1	5	0
D	0	0	0	-	0	4	0
E	0	0	0	0	-	0	6
F	0	0	0	0	0	-	9
G	0	0	0	0	0	0	-

Setelah kita mencari nilai kapasitas, aliran, dan kapasitas sisa pada lintasan diatas, maka langkah berikutnya yang akan kita lakukan adalah pencarian dari masing-masing lintasan (path), pencarian path dilakukan dengan mengunjungi simpul-simpul yang menghubungkan antara mess tempat mereka tinggal dengan kantor. Berdasarkan gambar 4.1 terdapat 5 lintasan yang menghubungkan dari A ke G, artinya dalam pencarian masalah aliran maksimum ini akan diselesaikan dengan pencarian sebanyak 5 path, seperti dibawah ini.

a) Pencarian path 1

Untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum pada lintasan yang terdapat pada gambar 4.1, ada 4 langkah yang akan diselesaikan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson. Langkah-langkah tersebut adalah :

Langkah 1 : Cari nilai dari arus kendaraan yang mengalir dari A menuju G melalui Lintasan $A-B-E-G$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-B-E-G$ adalah $(7,4,6)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya adalah 4

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 4

Langkah 4 : $f[v,u]=-f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path.

Dari pencarian path 1 yaitu lintasan $A-B-E-G$, di peroleh nilai kapasitas minimum nya adalah 4. maka aliran yang mengalir dari lintasan tersebut di tambah 4.

Tabel 4.4 Aliran yang mengalir dari lintasan $A-B-E-G$

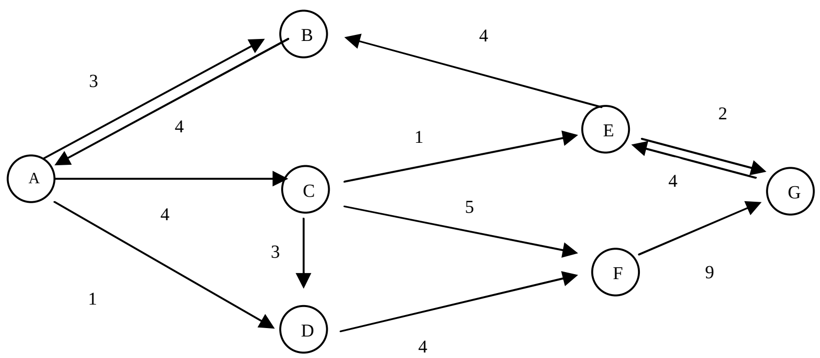
f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	4	0	0	0	0	0
B	-4	-	0	0	4	0	0
C	0	0	-	0	0	0	0
D	0	0	0	-	0	0	0
E	0	-4	0	0	-	0	4
F	0	0	0	0	0	-	0
G	0	0	0	0	-4	0	-

Oleh karena arus maksimum yang mengalir pada lintasan $A-B-E-G$ adalah 4 atau 400 mobil/jam, maka tiap arus yang menuju ke *G* dikurangi 4, dan arus yang berlawanan arah ditambah 4, sehingga nilai kapasitas sisa yang diperoleh adalah :

Tabel 4.5 Nilai Kapasitas sisa dari lintasan $A-B-E-G$

cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	3	4	1	0	0	0
B	4	-	0	0	0	0	0
C	0	0	-	3	1	5	0
D	0	0	0	-	0	4	0
E	0	4	0	0	-	0	2
F	0	0	0	0	0	-	9
G	0	0	0	0	4	0	-

Dari pencarian path 1, diperoleh lintasan yang mengubungkan $A-B-E-G$ dengan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson yaitu :



Gambar 4.7 lintasan *A-B-E-G*

b) Pencarian Path 2

Berdasarkan gambar 4.6 akan. akan kita pilih lagi lintasan yang dapat menghubungkan dari *A* ke *G*, dengan melakukan langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Ambil Lintasan $A-C-E-G$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-C-E-G$ adalah $(4,1,2)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya adalah : 1

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 1.

Langkah 4 : $f[v,u]=-f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path.

Berdasarkan langkah-langkah tersebut diatas, diperoleh aliran yang mengalir dari $A-C-E-G$ sebesar 1 satuan, kemudian alirkan arus tersebut ke lintasan.

Tabel 4.6 Aliran yang mengalir dari lintasan $A-C-E-G$

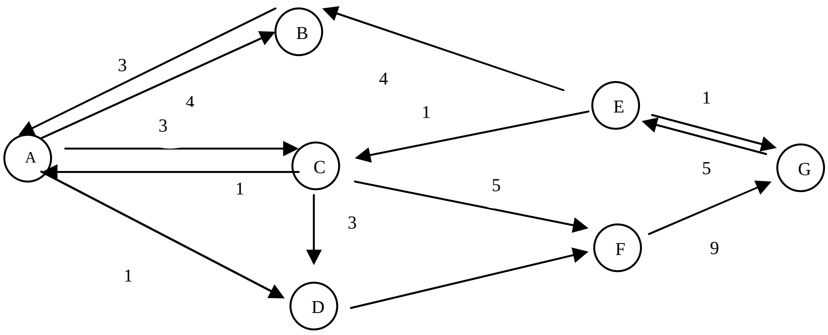
f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	4	1		0	0	0
B	-4	-	0	0	4	0	0
C	-1	0	-	0	1	0	0
D	0	0	0	-	0	0	0
E	0	-4	-1	0	-	0	5
F	0	0	0	0	0	-	0
G	0	0	0	0	-5	0	-

Oleh karena arus maksimum minimum yang mengalir pada lintasan $A-C-E-G$ adalah 1 atau 100 mobil/jam, maka tiap arus yang menuju ke *G* dikurangi 1, dan arus yang berlawanan arah ditambah 1, sehingga nilai kapasitas sisa yang diperoleh adalah.

Tabel 4.7 Nilai Kapasitas sisa yang diperoleh dari lintasan $A-C-E-G$

c	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	3	3	1	0	0	0
B	4	-	0	0	0	0	0
C	1	0	-	3	0	5	0
D	0	0	0	-	0	4	0
E	0	4	1	0	-	0	1
F	0	0	0	0	0	-	9
G	0	0	0	0	5	0	-

Berdasarkan langkah-langkah diatas, maka lintasan yang menghubungkan dari $A-C-E-G$ adalah:



Gambar 4.8 lintasan dari *A-C-E-G*

c) Pencarian path 3

Berdasarkan gambar 4.7 diatas, maka akan kita pilih lagi lintasan yang dapat menghubungkan antarara simpul *A* ke simpul *G*, dengan melakukan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Pilih Lintasan $A-C-F-G$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-C-F-G$ adalah $(3,5,9)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya adalah : 3

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 3

Langkah 4 : $f[v,u] = -f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path.

Berdasarkan langkah-langkah tersebut diatas, diperoleh aliran yang mengalir dari $A-C-F-G$ sebesar 3 satuan, dan bila berlawanan arah, ditambah -3 kemudian alirkan arus tersebut ke lintasan.

Tabel 4.8 Aliran yang mengalir dari lintasan $A-C-F-G$

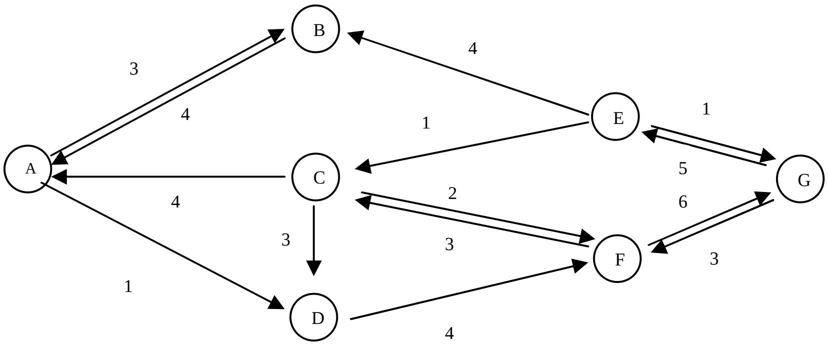
f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	4	4	0	0	0	0
B	-4	-	0	0	4	0	0
C	-4	0	-	0	1	3	0
D	0	0	0	-	0	0	0
E	0	-4	-1	0	-	0	0
F	0	0	-3	0	0	-	3
G	0	0	0	0	0	-3	-

Oleh karena arus maksimum minimum yang mengalir pada lintasan $A-C-F-G$ adalah 3 atau 300 mobil/jam, maka tiap arus yang menuju ke *G* dikurangi 3, dan arus yang berlawanan arah ditambah 3, sehingga nilai kapasitas sisa yang diperoleh adalah.

Tabel 4.9 Nilai Kapasitas sisa yang diperoleh dari lintasan

cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	3	0	1	0	0	0
B	4	-	0	0	0	0	0
C	4	0	-	3	0	2	0
D	0	0	0	-	0	4	0
E	0	4	1	0	-	0	0
F	0	0	3	0	0	-	6
G	0	0	0	0	0	3	-

Dari pencarian path 1, diperoleh lintasan yang mengubungkan $A-C-F-G$ yaitu:



Gambar 4.9 lintasan dari *A-C-F-G*

d) Pencarian path 4

Berdasarkan gambar 4.8 diatas, maka akan kita pilih lagi lintasan yang dapat menghubungkan antarara simpul *A* ke simpul *G*, dengan melakukan langkah-langkah sebagai berikut

Langkah 1 : Pilih Lintasan $A-C-D-F-G$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-C-D-F-G$ adalah $(0,3,4,5)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya adalah 0

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 0

Langkah 4 : $f[v,u]=-f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path.

Karena nilai kapasitas minimum pada lintasan ini adalah 0, maka arus dan nilai kapasitas sisa juga 0.

Tabel 4.10 Aliran yang mengalir dari lintasan $A-C-D-F-G$

f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	4	4	0	0	0	0
B	-4	-	0	0	4	0	0
C	-4	0	-	0	1	3	0
D	0	0	0	-	0	0	0
E	0	-4	-1	0	-	0	0
F	0	0	-3	0	0	-	3
G	0	0	0	0	0	-3	-

Tabel 4.11 Nilai Kapasitas sisa yang diperoleh dari lintasan $A-C-D-F-G$

cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	3	0	1	0	0	0
B	4	-	0	0	0	0	0
C	4	0	-	3	0	2	0
D	0	0	0	-	0	4	0
E	0	4	1	0	-	0	0
F	0	0	3	0	0	-	6
G	0	0	0	0	0	3	-

e) Pencarian Path 5

Berdasarkan gambar 4.8 diatas, maka akan kita pilih lagi lintasan lain yang masih memungkinkan untuk dikunjungi dari simpul *A* ke simpul *G*, dengan melakukan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1 : Jalur lain atau lintasan lain yang masih memungkinkan untuk dilewati adalah jalur $A-D-F-G$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-D-F-G$ adalah $(1,4,6)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya adalah : 1

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 1

Langkah 4 : $f[v,u]=-f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path.

Berdasarkan langkah-langkah tersebut diatas, diperoleh aliran yang mengalir dari $A - D - F - G$ sebesar 1 satuan, dan bila berlawanan arah, tambahkan -1, kemudian alirkan arus tersebut ke lintasan.

Tabel 4.12 Aliran yang mengalir dari lintasan $A - D - F - G$

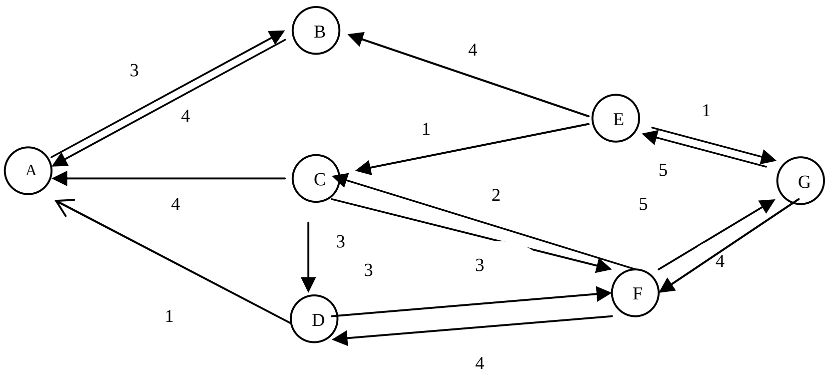
f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	4	4	1	0	0	0
B	-4	-	0	0	4	0	0
C	-4	0	-	0	1	3	0
D	-1	0	0	-	0	1	0
E	0	-4	-1	0	-	0	0
F	0	0	-3	-1	0	-	4
G	0	0	0	0	0	-4	-

Oleh karena arus maksimum minimum yang mengalir pada lintasan $A - D - F - G$ adalah 1 atau 100 mobil/jam, maka tiap arus yang menuju ke *G* dikurangi 1, dan arus yang berlawanan arah ditambah 1, sehingga nilai kapasitas sisa yang diperoleh adalah

Tabel 4.13 Nilai Kapasitas sisa yang diperoleh dari lintasan $A - D - F - G$

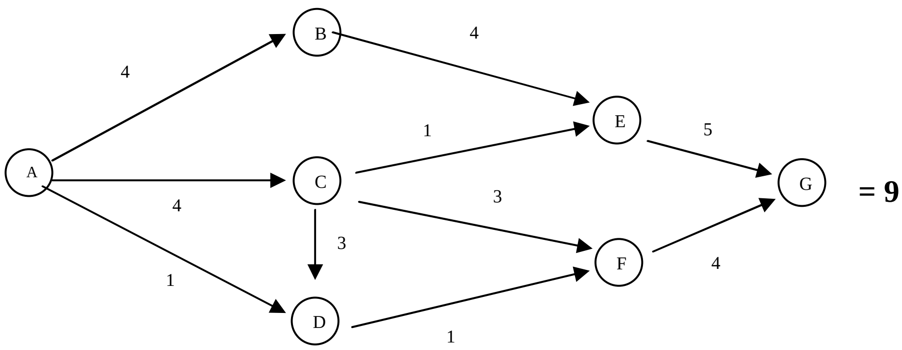
cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A	-	3	0	0	0	0	0
B	4	-	0	0	0	0	0
C	4	0	-	3	0	2	0
D	1	0	0	-	0	3	0
E	0	4	1	0	-	0	0
F	0	0	3	1	0	-	5
G	0	0	0	0	0	4	-

Berdasarkan langkah-langkah diatas, maka diperoleh lintasan terakhir yang menghubungkan antara *A* – *G*. Lintasan nya dapat dilihat seperti gambar dibawah ini:



Gambar 4.10 Lintasan dari *A-D-F-G*

Karena tidak ada lagi arus yang dapat mengalir dari *A* ke *G*, maka proses pencarian masalah aliran maksimum telah selesai dilakukan, disini dapat dilihat hasil akhir dari masalah aliran maksimum kendaraan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson adalah



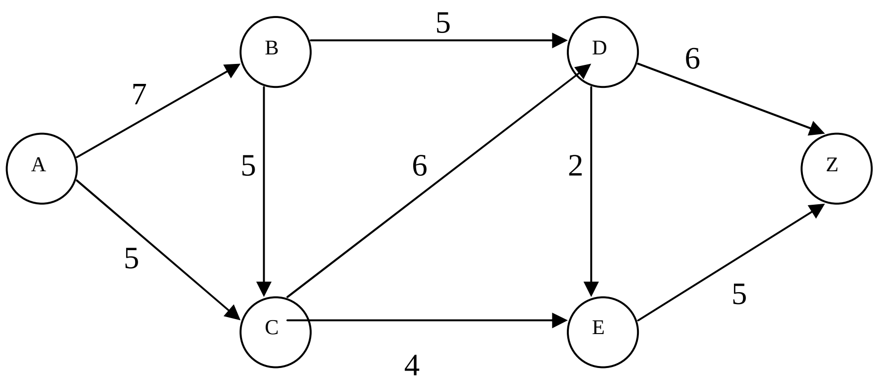
Gambar 4.11 Maximum Flow of Cars Menggunakan Algoritma Ford Fulkerson

Berdasarkan gambar diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa arus maksimum yang menghubungkan antara mess karyawan ke tempat mereka bekerja dengan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson adalah sebesar 9 atau 900 mobil/jam.

4.4.2 Penyelesaian masalah aliran maksimum pada sistem pemipaan

Selain menyelesaikan masalah aliran maksimum pada kendaraan, contoh lain yang bisa diterapkan pada kasus masalah aliran maksimum (*maximum flow problems*) adalah masalah sistem pendistribusian minyak melalui pipa yang akan mengalirkan minyak dari suatu lokasi ke lokasi yang lain.

Misalkan terdapat 6 buah pipa yaitu *A, B, C, D, E, Z,* Huruf *A* menunjukkan lokasi awal yang digunakan untuk mengalirkan minyak sampai ke lokasi tujuan yaitu *Z*, pendistribusian ini dilakukan melalui pipa *B, C, D, E*. sedangkan angka 2, 4, 5, 6, 7, adalah banyak nya minyak yang dialirkan pada setiap pipa yang menghubungkan $A \rightarrow Z$. sebelum menjelaskan ke pemecahan masalah, perlu dijelaskan terlebih dahulu maksud dari angka-angka yang terdapat pada setiap cabang. Cabang yang menghubungkan antara $A \rightarrow B$ yang memuat angka 7, maksudnya adalah banyak nya minyak yang dialirkan dari pipa *A* ke pipa *B* sebesar 700 liter / jam. Sedangkan dari $B \rightarrow D$ memauat angka 5, maksudnya adalah pada pipa tersebut dialirkan minyak sebesar 500 liter/jam. Sistem pemipaan tersebut dapat digambarkan dalam jaringan dibawah ini.



Gambar 4.12 sistem pemipaan aliran minyak

Permasalahannya adalah berapa liter aliran minyak yang mengalir pada sistem pipa dari *A* ke *Z*, untuk menyelesaikan permasalahan diatas akan digunakan Algoritma *Djikstra* dan Algoritma *Ford-Fulkerson*.

1. Penyelesaian masalah aliran maksimum pada sistem pemipaan menggunakan Algoritma Djikstra

Berdasarkan gambar 4.12 akan dicari sebuah solusi dari permasalahan sistem pemipaan untuk mengalirkan minyak dari simpul awal (*A*) ke simpul tujuan (*Z*) menggunakan Algoritma Djikstra. Sebelum menentukan langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah aliran maksimum diatas, ada 7 lintasan yang menghubungkan *A* ke *Z*.

Lintasan-lintasan tersebut adalah :

1. Lintasan $A-B-C-D-E-Z$
2. Lintasan $A-B-C-D-Z$
3. Lintasan $A-B-C-E-Z$
4. Lintasan $A-B-D-Z$
5. Lintasan $A-C-D-E-Z$
6. Lintasan $A-C-D-Z$
7. Lintasan $A-C-E-Z$

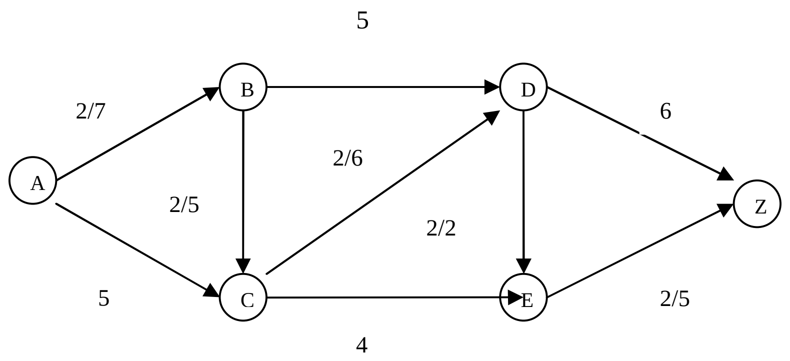
Berdasarkan 7 lintasan diatas, kita bisa mencari solusi untuk mencari masalah aliran maksimum yang mengalir pada sistem pipa tersebut. Ada 3 langkah yang akan diselesaikan dalam menggunakan Algoritma Djikstra :

Langkah 1: Pada jaringan diatas didapat lintasan $A-B-C-D-E-Z$ yang menghubungkan pipa *A* ke pipa *Z*

Langkah 2 : Nilai kapasitas sisi yang didapat pada lintasan tersebut adalah : $(7,5,6,2,5)$, sedangkan nilai kapasitas minimum sisa adalah 2

Langkah 3 : Alirkan arus sejumlah 2 satuan pada lintasan $A-B-C-D-E-Z$

Berdasarkan langkah-langkah yang telah diselesaikan, maka lintasan sistem pemipaan yang diperoleh adalah



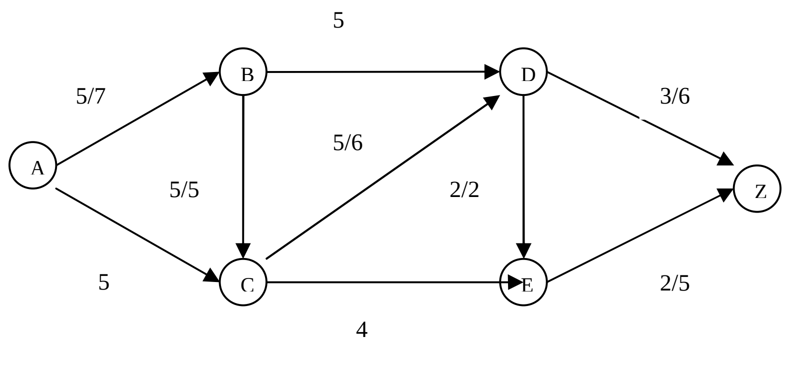
Gambar 4.13 Lintasan dari *A-B-C-D-E-Z*

Berdasarkan ganbar 4.13 akan dicari lagi solusi untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum lain yang bisa menghubungkan dari *A* ke *Z*, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Lintasan berikutnya yang dipilih adalah $A - B - C - D - Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas sisinya adalah $(5,3,4,6)$, sedangkan nilai kapasitas minimum sisa yang diperoleh adalah 3

Langkah 3 : Alirkan arus sejumlah 3 satuan pada lintasan



Gambar 4.14 Lintasan dari *A-B-C-D-Z*

Berdasarkan gambar 4.14 akan dicari lagi lintasan yang dapat menghubungkan antara simpul awal ke simpul tujuan, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1 : Jalur atau lintasan yang akan dipilih berikutnya adalah $A-B-C-E-Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas minimum sisi adalah $(2{,}0{,}4{,}2)$, dan nilai kapasitas minimum sisanya adalah 0

Langkah 3 : Tidak dapat dialiri arus lagi karena nilai kapasitas minimumnya adalah 0

Karena nilai kapasitas minimumnya adalah 0, maka lintasan yang diperoleh sama dengan lintasan sebelumnya.

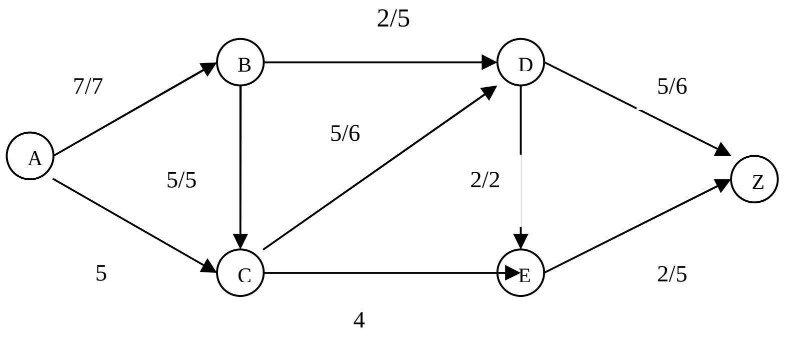
Berdasarkan gambar pada 4.14 diatas, maka akan dilakukan lagi langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum yang menghubungkan simpul awal dengan simpul akhir dengan langkah-langkah :

Langkah 1 : Pilih lintasan $A-B-D-Z$ sebagai lintasan berikutnya

Langkah 2 : Nilai kapasitas sisinya adalah : $(2{,}5{,}3)$, sedangkan nilai kapastas minimum sisa yang diperoleh adalah 2.

Langkah 3 : Alirkan arus sejumlah 2 satuan pada lintasan tersebut.

Dari langkah tersebut di atas, diperoleh lintasan sebagai berikut :



Gambar 4.15 Lintasan dari *A-B-D-Z*

Berdasarkan gambar 4.15 di atas, maka akan dilakukan lagi langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah liran maksimum pada sistem pemipaan aliran minyak, langkah-langkah nya sebagai berikut :

Langkah 1 : lintasan berikutnya yang dipilih adalah lintasan $A-C-D-E-Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas sisinya adalah $(5,1,0,3)$ dan nilai kapasitas minimumnya 0

Langkah 3 : Tidak dapat dialiri arus lagi karena nilai kapasitas minimumnya 0, maka lintasan yang diperoleh sama dengan lintasan sebelumnya.

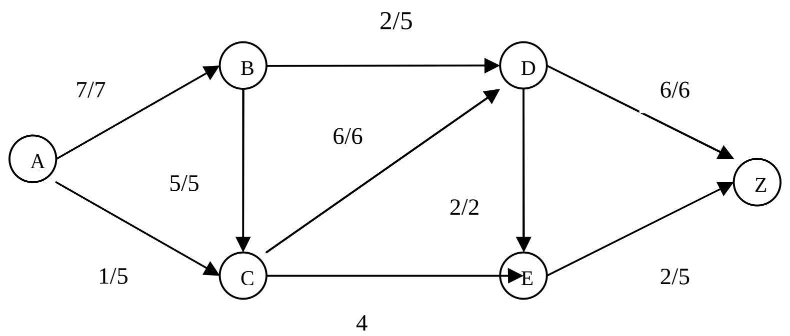
Berdasarkan gambar 4.15 akan dicari lagi lintasan yang dapat menghubungkan simpul awal dengan simpul akhir dengan langkah-langkah :

Langkah 1 : Lintasan yang dipilih berikutnya adalah lintasan $A-C-D-Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas sisi adalah $(5,1,4)$, dan nilai kapasitas minimumnya 1

Langkah 3 : Alirkan arus sejumlah 1 satuan pada lintasan $A-C-D-Z$

Berdasarkan langkah diatas, diperoleh lintasan sbb:



Gambar 4.16 Lintasan dari *A-C-D-Z*

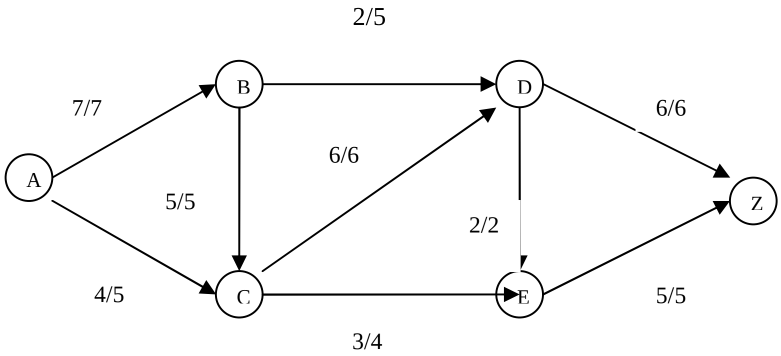
Berdasarkan gambar 4.16 diatas, maka diperoleh lintasan terakhir yang menghubungkan antara pipa *A* ke pipa *Z*, dengan langkah-langkah :

Langkah 1 : Kemudian pilih lintasan $A - C - E - Z$ sebagai lintasan terakhir yang dapat menghubungkan simpul awal menuju simpul tujuan

Langkah 2 : Kapasitas sisinya adalah $(4,4,3)$, dan nilai kapasitas minimum sisanya adalah 3

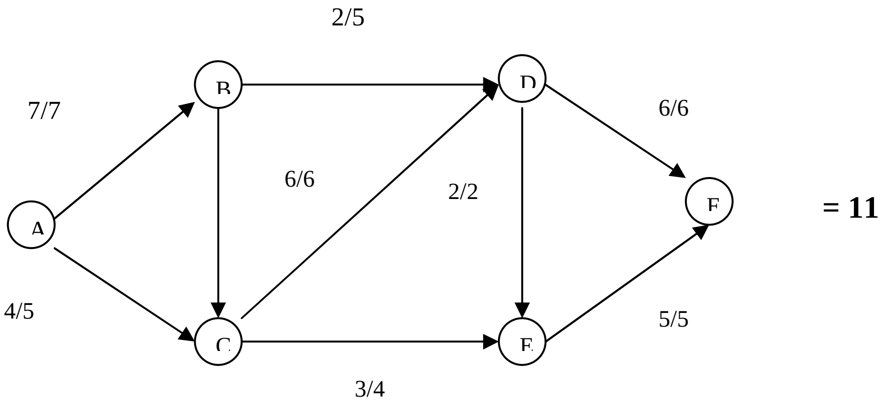
Langkah 3 : Alirkan arus sejumlah 3 satuan pada lintasan $A - C - E - Z$

Pada langkah ini tidak ada lagi jalur atau lintasan yang dapat menghubungkan antara *A* Ke *Z*, sehingga solusi dari masalah aliran maksimum menggunakan Algoritma Djikstra pada sistem pemipaan aliran minyak adalah



Gambar 4.17 Lintasan dari *A-C-E-Z*

Karena tidak ada lagi lintasan yang dapat mengalir dari pipa *A* ke *Z*, maka proses telah mencapai proses penyelesaian yang optimum. Dari hasil diatas dapat kita letahui bahwa jumlah aliran minyak dari lokasi *A* ke lokasi *Z*, dari hasil diatas dapat kita ketahui bahwa jumlah aliran minyak yang dapat mengalir dari network tersebut adalah 11, artinya banyaknya aliran minyak yang dapat menghubungkan ladang minyak ke pabrik sebesar 1100 liter/jam.



Gambar 4.18 Solusi dari masalah aliran maksimum pada distribusi Minyak dalam sistem pemipaan

2 Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum dalam sistem pemipaan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson

Selain menggunakan Algoritma Djikstra, masalah aliran maksimum pada pendistribusian minyak dapat juga dicari dengan menggunakan Algoritma Fod-Fulkerson. Sebelum kita menyelesaikan masalah aliran maksimum menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson, ada 3 langkah yang harus kita tentukan terlebih dahulu, yaitu kita harus menentukan nilai kapasitas, aliran yang mengalir pada setiap lintasan, dan kapasitas tersisa dari lintasan yang menghubungkan antara ladang minyak menuju ke pabrik.

Berdasarkan gambar 4.12 dapat kita peroleh nilai kapasitas, aliran dan kapasitas sisa dari network yang mengalir pada lintasan, ke tiga nilai tersebut dapat disajikan dalam bentuk tabel seperti di bawah ini

Tabel 4.14 Nilai kapasitas dari tempat pengambilan minyak ke pabrik

c	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	7	5	0	0	0
B	0	-	5	5	0	0
C	0	0	-	6	4	
D	0	0	0	-	2	6
E	0	0	0	0	-	5
Z	0	0	0	0	0	-

Tabel 4.15 Aliran yang mengalir dari network tersebut

f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	0	0	0	0	0
B	0	-	0	0	0	0
C	0	0	-	0	0	0
D	0	0	0	-	0	0
E	0	0	0	0	-	0
Z	0	0	0	0	0	-

Tabel 4.16 Nilai kapasitas sisa dari gambar 4.12

c	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	7	5	0	0	0
B	0	-	5	5	0	0
C	0	0	-	6	4	
D	0	0	0	-	2	6
E	0	0	0	0	-	5
Z	0	0	0	0	0	-

Setelah kita mencari nilai kapasitas, aliran, dan kapasitas sisa pada lintasan diatas, maka langkah berikutnya yang akan kita lakukan adalah pencarian dari masing-masing lintasan (path), pencarian path dilakukan dengan mengunjungi simpul-simpul yang menghubungkan antara simpul awal ke simpul tujuan, Berdasarkan gambar 4.12 terdapat 7 lintasan yang menghubungkan dari *A* ke *Z* artinya dalam pencarian masalah aliran maksimum ini akan diselesaikan dengan pencarian sebanyak 7 path, seperti dibawah ini.

a) Pencarian path 1

Untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum pada lintasan yang terdapat pada gambar 4.12 ada 4 langkah yang akan diselesaikan dengan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson. Langkah-langkah tersebut adalah

Langkah 1 : Cari nilai dari sistem pemompaan aliran minyak dari lokasi A menuju lokasi Z melalui Lintasan $A-B-C-D-E-Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-B-C-D-E-Z$ adalah $(7{,}5{,}6{,}2{,}5{,}3)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya adalah 2

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 2

Langkah 4 : $f[v,u]=-f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path

Tabel 4.17 Aliran yang mengalir dari lintasan $A-B-C-D-E-Z$

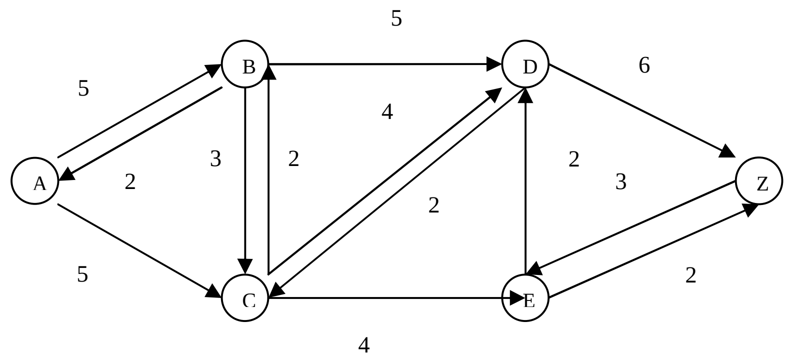
f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	2	0	0	0	0
B	-2	-	2	0	0	0
C	0	-2	-	2	0	0
D	0	0	-2	-	2	0
E	0	0	0	-2	-	2
Z	0	0	0	0	-2	-

Oleh karena arus maksimum yang mengalir pada lintasan $A-B-C-D-E-Z$ adalah 2 atau 200 liter/jam, maka tiap arus yang menuju ke *Z* dikurangi 2, dan arus yang berlawanan arah ditambah 2, sehingga nilai kapasitas sisa yang diperoleh adalah :

Tabel 4.18 Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-B-C-D-E-Z$

cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	5	5	0	0	0
B	2	-	3	5	0	0
C	0	2	-	4	0	0
D	0	0	2	-	0	6
E	0	0	0	2	-	3
Z	0	0	0	0	2	-

Dari pencarian path 1, diperoleh lintasan yang menghubungkan $A - B - C - D - E - Z$ dengan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson yaitu:



Gambar 4.19 Lintasan *A-B-C-D-E-Z*

b) Pencarian Path ke 2

Untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum pada lintasan yang terdapat pada gambar 4.19, ada 4 langkah yang akan diselesaikan dengan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson. Langkah-langkah tersebut adalah

Langkah 1 : Cari nilai dari sistem pemompaan aliran minyak dari lokasi A menuju lokasi Z melalui Lintasan $A - B - C - D - Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A - B - C - D - Z$ adalah $(5,3,4,6)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya adalah 3

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 3

Langkah 4 : $f[v,u] = -f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path

Berdasarkan langkah-langkah tersebut diatas, diperoleh aliran yang mengalir dari $A - B - C - D - Z$ sebesar 3 satuan, kemudian alirkan arus tersebut ke lintasan.

Tabel 4.19 Aliran yang mengalir $A - B - C - D - Z$

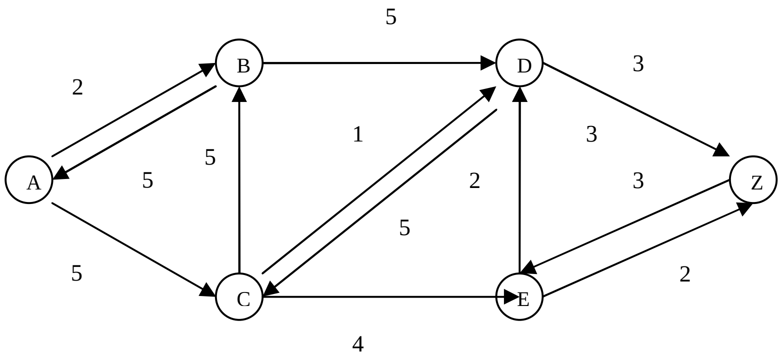
f	A	B	C	D	E	Z
A	-	-5	0	0	0	0
B	-5	-	5	0	0	0
C	0	-5	-	5	0	0
D	0	0	-5	-	2	3
E	0	0	0	-2	-	2
Z	0	0	0	0	-2	-

Oleh karena arus maksimum yang mengalir pada lintasan $A-B-C-D-Z$ adalah 3 atau 300 liter/jam, maka tiap arus yang menuju ke Z dikurangi 2, dan arus yang berlawanan arah ditambah 3, sehingga nilai kapasitas sisa yang diperoleh adalah

Tabel 4.20 Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-B-C-D-Z$

cr	A	B	C	D	E	Z
A	-	2	5	0	0	0
B	5	-	0	5	0	0
C	0	5	-	1	4	0
D	0	0	5	-	0	3
E	0	0	0	2	-	3
Z	0	0	0	0	2	-

Berdasarkan langkah-langkah diatas, maka lintasan dari $A-B-C-D-Z$ adalah



Gambar 4.20 Lintasan *A-B-C-D-Z*

c) Pencarian path ke 3

Berdasarkan gambar 4.20 akan kita pilih lagi lintasan yang dapat menghubungkan dari A ke Z, dengan melakukan langkah sebagai berikut

Langkah 1 : Cari nilai dari sistem pemompaan aliran minyak dari lokasi *A* menuju lokasi *Z* melalui Lintasan $A-B-C-E-Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-B-C-E-Z$ adalah $(2,0,4,2)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya 0

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v)dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 0

Langkah 4 : $f[v,u]=-f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path

Tabel 4.21 Aliran yang mengalir $A-B-C-E-Z$

f	A	B	C	D	E	Z
A	-	-5	0	0	0	0
B	-5	-	5	0	0	0
C	0	-5	-	5	0	0
D	0	0	-5	-	2	3
E	0	0	0	-2	-	2
Z	0	0	0	0	-2	-

Tabel 4.22 Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-B-C-E-Z$

cr	A	B	C	D	E	Z
A	-	2	5	0	0	0
B	5	-	0	5	0	0
C	0	5	-	1	4	0
D	0	0	5	-	0	3
E	0	0	0	2	-	3
Z	0	0	0	0	2	-

d) Pencarian path 4 :

Berdasarkan gambar 4.20 akan kita pilih lagi lintasan yang dapat menghubungkan dari *A* ke *Z*, dengan melakukan langkah sebagai berikut

Langkah 1 : aliran minyak dari lokasi *A* menuju lokasi *Z* melalui Lintasan $A-B-D-Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-B-D-Z$ adalah $(2,5,3)$, sedangkan nilai kapasitas minimumnya adalah 2

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 2

Langkah 4 : $f[v,u]=-f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path

Berdasarkan langkah-langkah tersebut diatas, diperoleh aliran yang mengalir dari $A-B-D-Z$ sebesar 2 satuan, kemudian alirkan arus tersebut ke lintasan.

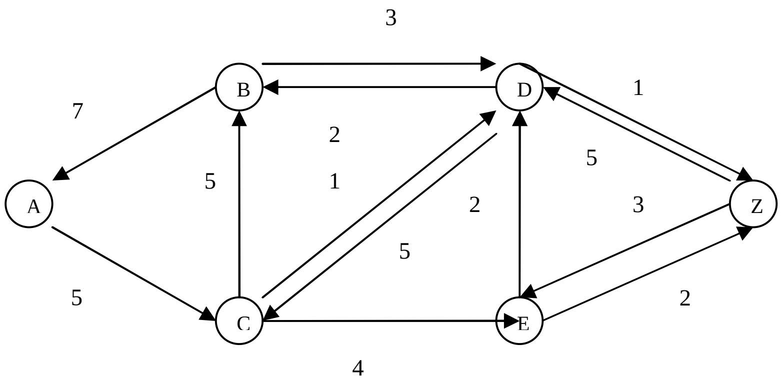
Tabel 4.23 Aliran yang mengalir $A-B-D-Z$

f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	7	0	0	0	0
B	-7	-	5	2	0	0
C	0	-5	-	5	0	0
D	0	-2	-5	-	2	5
E	0	0	0	-2	-	2
Z	0	0	0	-5	-2	-

Oleh karena arus maksimum yang mengalir pada lintasan $A-B-D-Z$ adalah 2 atau 200 liter/jam, maka tiap arus yang menuju ke *Z* dikurangi 2, dan arus yang berlawanan arah ditambah 2, sehingga nilai kapasitas sisa yang diperoleh adalah :

Tabel 4.24 Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-B-D-Z$

cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	0	5	0	0	0
B	7	-	0	5	0	0
C	0	5	-	1	4	0
D	0	2	5	-	0	1
E	0	0	0	2	-	3
Z	0	0	0	5	2	-



Gambar 4.21 Lintasan *A-B-D-Z*

e) Pencarian Path ke 5

Berdasarkan gambar 4.21 maka diperoleh lintasan terakhir yang menghubungkan antara A dengan Z dengan langkah-langkah :

Langkah 1 : Cari nilai dari sistem pemompaan aliran minyak dari lokasi *A* menuju lokasi Z melalui Lintasan $A-C-D-E-Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-C-D-E-Z$ adalah $(5,1,0,3)$, sedangkan nilai kapasitas minimum 0

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 0

Langkah 4 : $f[v,u] = -f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path

Tabel 4.28 Aliran yang mengalir pada lintasan $A-C-D-E-Z$

cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	7	4	0	0	0
B	-7	-	5	2	0	0
C	-4	-5	-	6	3	0
D	0	-2	-6	-	2	6
E	0	0	-3	0	-	5
Z	0	0	0	-6	-5	-

Tabel 4.29 Nilai kapasitas minimum pada lintasan $A-C-D-E-Z$

cr	A	B	C	D	E	Z
A	-	0	1	0	0	0
B	7	-	0	3	0	0
C	4	5	-	0	1	0
D	0	2	6	-	0	0
E	0	0	2	3	-	0
Z	0	0	0	6	5	-

Karena nilai minimum yang diperoleh dari lintasan $A-C-D-E-Z$ adalah 0, maka arus dan nilai kapasitas minimumnya juga 0.

f) Pencarian Path 6

Berdasarkan gambar 4.21 akan kita pilih lagi lintasan yang dapat menghubungkan dari *A* ke *Z*, dengan melakukan langkah sebagai berikut

Langkah 1 : Cari nilai dari sistem pemompaan aliran minyak dari lokasi *A* menuju lokasi *Z* melalui Lintasan $A-C-D-Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-C-D-Z$ adalah $(5,1,1)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya adalah 1

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum adalah 1

Langkah 4 : $f[v,u]=-f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path

Berdasarkan langkah-langkah tersebut diatas, diperoleh aliran yang mengalir dari $A-C-D-Z$ adalah 1 satuan, kemudian alirkan arus tersebut ke lintasan

Tabel 4.25 Aliran yang mengalir pada lintasan $A-C-D-Z$

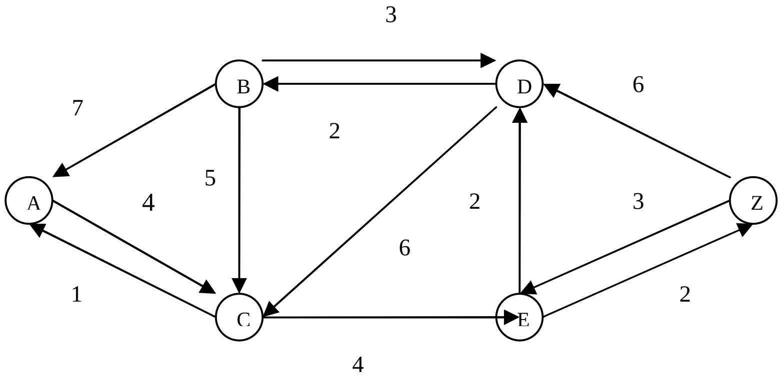
f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	7	1	0	0	0
B	-7	-	5	2	0	0
C	-1	-5	-	6	0	0
D	0	-2	-6	-	2	6
E	0	0	0	-2	-	2
Z	0	0	0	-6	-2	-

Oleh karena arus maksimum yang mengalir pada lintasan $A-C-D-Z$ adalah 1 atau 100 liter/jam, maka tiap arus yang menuju ke *Z* dikurangi 1, dan arus yang berlawanan arah ditambah 1, sehingga nilai kapasitas sisa yang diperoleh adalah :

Tabel 4.26 Nilai kapasitas sisa yang diperoleh dari lintasan

cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	0	4	0	0	0
B	7	-	0	3	0	0
C	1	5	-	0	4	0
D	0	2	6	-	0	0
E	0	0	2	2	-	3
Z	0	0	0	6	2	-

Berdasarkan langkah diatas, maka lintasannya adalah



Gambar 4.22 Lintasan *A-C-D-Z*

g) Pencarian Path ke 7

Berdasarkan gambar 4.22 akan kita pilih lagi lintasan yang dapat menghubungkan dari *A* ke *Z*, dengan melakukan langkah sebagai berikut.

Langkah 1 : Cari nilai dari sistem pemompaan aliran minyak dari lokasi *A* menuju lokasi *Z* melalui Lintasan $A-C-E-Z$

Langkah 2 : Nilai kapasitas dari lintasan $A-C-E-Z$ adalah $(4{,}4{,}3)$, sedangkan nilai kapasitas minimum nya adalah 3

Langkah 3 : Update setiap $f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam lintasan sesuai dengan nilai kapasitas minimum yaitu 3

Langkah 4 : $f[v,u]=-f[u,v]$ untuk setiap (u,v) dalam path

Berdasarkan langkah-langkah tersebut diatas, diperoleh aliran yang mengalir dari $A-C-E-Z$ adalah 3 satuan, maksudnya tiap yang mengalir menuju ke *Z* ditambah 3, dan bila berlawanan arah dikurang 3.

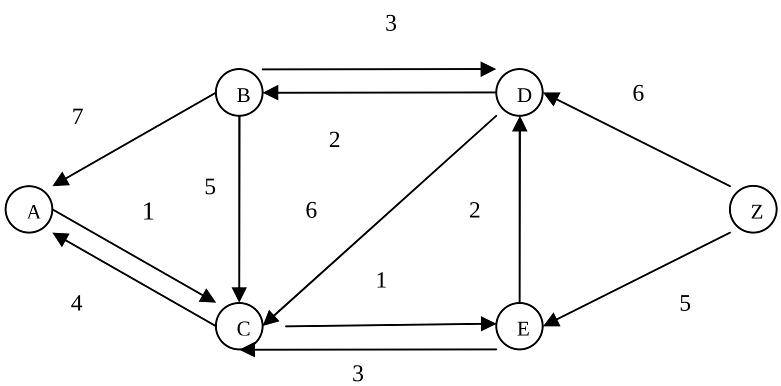
Tabel 4.27 Aliran yang mengalir pada lintasan $A - C - E - Z$

f	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	7	4	0	0	0
B	-7	-	5	2	0	0
C	-4	-5	-	6	3	0
D	0	-2	-6	-	2	6
E	0	0	-3	0	-	5
Z	0	0	0	-6	-5	-

Tabel 4.27 Nilai kapasitas minimum sisa yang diperoleh adalah

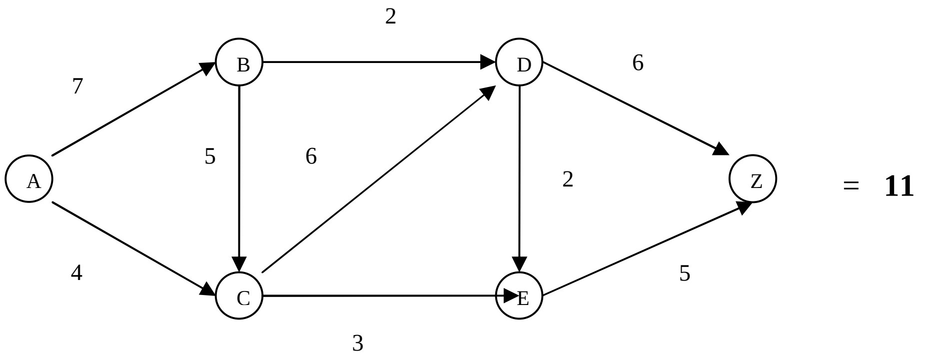
cr	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Z*
A	-	0	1	0	0	0
B	7	-	0	3	0	0
C	4	5	-	0	1	
D	0	2	6	-	0	0
E	0	0	2	3	-	0
Z	0	0	0	6	5	-

Pada pencarian path 6, diperoleh lintasan yang menghubungkan $A - C - E - Z$ yaitu :



Gambar 4.23 Lintasan dari *A-C-E-Z*

Berdasarkan langkah-langkah diatas, maka proses pencarian masalah nilai aliran maksimum telah selesai dilakukan, sehingga hasil akhir dari masalah aliran maksimum dalam sistem pemipaan minyak dengan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson adalah



Gambar 4.24 Maksimum Flow Problem pada sistem pemipaan Menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson

Berdasarkan gambar di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa arus maksimum yang menghubungkan antara tempat pengambilan minyak (ladang minyak) ke pabrik dengan menggunakan Algoritma Ford-Fulkerson adalah 11 atau 1100 liter/jam

BAB V
KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Masalah aliran maksimum (*maximum flow problems*) pada umumnya merupakan suatu masalah untuk menentukan rute-rute perjalanan sehingga total perjalanan yang dilakukan setiap harinya menjadi maksimum, tanpa melanggar batas maksimum perjalanan dan dapat dilakukan pada masing-masing jalan. Contoh kasus permasalahan aliran maksimum yang dibahas pada skripsi ini adalah memaksimumkan aliran kendaraan (*maximum flow of cars*) dan memaksimumkan pendistribusian minyak dari tempat pengambilan minyak (ladang minyak) ke pabrik. Kedua kasus tersebut akan dicari aliran maksimum dengan menggunakan dua metode, yaitu Algoritma Djikstra dan Algoritma Ford-Fulkerson.

Setelah diselesaikan dengan Algoritma Djikstra dan Ford-Fulkerson, diperoleh bahwa untuk contoh kasus tersebut menghasilkan nilai yang sama. Untuk kasus arus maksimum kendaraan (*maximum flow of car)* dari mess karyawan tinggal sampai ke tempat kerjanya adalah sama, yaitu 9 atau 900 mobil/jam. Untuk kasus aliran minyak yang mengalir dari tempat pengambilan minyak ke pabrik adalah 11 atau 1100 liter/jam. Jadi, penyelesaian yang diperoleh Algoritma Djikstra maupun Algoritma Ford-Fulkerson menghasilkan nilai yang sama.

5.2 Saran

Penulisan ini dibahas tentang penyelesaian masalah aliran maksimum dengan menggunakan Algoritma Djikstra dan Algoritma Ford-Fulkerson. Bagi yang tertarik dapat mengembangkan penelitian tentang masalah aliran maksimum dengan menggunakan Algoritma *Gomory-Hu* dan Algoritma *Max-Cut Flow*.

DAFTAR PUSTAKA

Dimyati, Ahmad, dan Dimyati Tarliah Tjutju. *Operatioan Research* (*Model-model pengambilan Keputusan*). Penerbit Sinar Baru Algensido. Bandung.1994

Fakhri, *Penerapan Algoritma Dijkstra dalam Maximum Flow Problem,* Bandung. 2008

Liberman, Gerald J, dan Hiller, Fredrick S, *Operations Research*, edisi ke-2, Late of Standford University. San Fransisco. 1973.

Munir, Rinaldi. Matematika Diskrit. Informatika Bandung. 2001

Sanjoyo, Ary *''Math ITS''* Http:// www.scribd.com/26807188/network.flow diakses 13 Juni 2010.

Setiawan, Suryana. *Struktur Data & Algoritme*, Fakultas Ilmu Komputer Universitas Indonesia, Jakarta. 2001

DAFTAR TABEL

Gambar **Halaman**

Nilai Kapasitas dari Mess ke Kantor IV-8
Aliran yang mengalir dari Network... IV-8
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-B-E-G$ IV-10
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-B-E-G$ 1V-10
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-C-E-G$ IV-11
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-C-E-G$ IV-11
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-C-F-G$ IV-12
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-C-F-G$ IV-13
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-C-D-F-G$ IV-14
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-C-D-F-G$ IV-14
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-D-F-G$ IV-15
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-D-F-G$ IV-15
Nilai kapasitas dari tempat pengambilan minyak ke pabrik............................ IV-23
Aliran yang mengalir dari Network... IV-24
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-B-C-D-E-Z$ IV-25
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-B-C-D-E-Z$ IV-25
Aliran yang mengalir dari lintasan $A - B - C - D - Z$ IV-27
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A - B - C - D - Z$ IV-27
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-B-C-E-Z$ IV-29
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-B-C-E-Z$ IV-29
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-B-D-Z$ IV-30
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-B-D-Z$ IV-30
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-C-D-E-Z$ IV-31
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-C-D-E-Z$ IV-32
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-C-D-Z$ IV-33
Nilai kapasitas sisa dari lintasan] $A-C-D-Z$ IV-33
Aliran yang mengalir dari lintasan $A-C-E-Z$ IV-35
Nilai kapasitas sisa dari lintasan $A-C-E-Z$ IV-35